**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ESCUELA DE CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

**MATEMATICAS INTERMEDIA 1**

**Ing. Douglas Kenedy Román Ávila**

**Aux. Ángel Jeferson Quim Ramírez**

**Sección: E**

**Proyecto #2**

**Eberth Alejandro Gabriel García Valdez**

**201901930**

**10/04/2024**

**INTRODUCCIÓN**

Para la solución de problemas matemáticos existen diversos métodos y herramientas que se pueden utilizar, las herramientas pueden ir desde el uso de la tecnología como método de solución o de forma tradicional o manual.

Para este proyecto se permitió la utilización de un software especializado en el área de matemática el cual ayudó en el análisis matemático de los problemas realizados y los cálculos necesarios para la solución de estos. En este proyecto de matemática intermedia uno se podrán encontrar problemas relacionados a los temas vistos previamente en clase. Dichos problemas son: La aplicación de series (series geométricas) y descubrimientos de secuencias para la solución de dichas series, la aplicación de ecuaciones polares que representan cónicas y la utilización del software para la creación de gráficas polares de dichas cónicas. Todos estos problemas fueron dados con el propósito de aprender y practicar la organización en un trabajo grupal.

**OBJETIVOS**

* **Objetivo general**

Realizar un buen análisis matemático para cada uno de los problemas planteados, mejorando así nuestra capacidad de resolver los problemas con ayuda de programas computacionales.

* **Objetivos específicos**

1. Interpretar y analizar el uso de cónicas con ayuda de software matemático para su fácil y rápida resolución.
2. Graficar y plantear ecuaciones polares dentro de cónicas haciendo uso de las propiedades de estas.
3. Plantear y formular series haciendo uso de las propiedades de estas para poder resolver problemas aplicados.

**MARCO TEÓRICO**

**Ecuaciones polares**

Una ecuación polar es aquella que define una curva expresada en coordenadas polares. En muchos casos se puede especificar tal ecuación definiendo r como una función 𝜃 la curva resultante consiste en una serie de puntos en la forma (r, 𝜃) y se puede representar como la gráfica de una función r.

**Secciones cónicas**

Se denomina sección cónica a todas las curvas todas las curvas resultantes de las diferentes las intersecciones entre un cono y un plano, si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas. Se clasifican en cuatro tipos:

Elipse

•Parábola

•Hipérbola

•Circunferencia

Elipse

•Parábola

•Hipérbola

•Circunferencia

•Elipse

•Parábola

•Hipérbola

•Circunferencia

•Elipse

•Parábola

•Hipérbola

•Circunferencia

1. Elipse
2. Parábola
3. Hipérbola
4. Circunferencia

**Secciones cónicas en coordenadas polares**

Cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a un punto fijo F (llamado foco) y a una recta fija (llamada directriz) es una cantidad constante e (llamada excentricidad). Además, la cónica es una elipse si 0 ≤ e < 1, una parábola si e = 1 y una hipérbola si e > 1.

Para entender las órbitas de los planetas, los cometas y otros cuerpos celestes, es necesario saber algo de las propiedades y naturaleza de las secciones cónicas.

Un tratamiento unificado para los tres tipos de cónicas en términos de un foco y la directriz, además si se coloca el foco en el origen, la cónica tiene una ecuación polar simple. Se concreta a la representación en forma polar de las secciones cónicas. Teorema: Sea F un punto fijo (en este caso el polo) llamado foco y L una recta fija (directriz) en un plano. Sea un número positivo (excentricidad). El conjunto de los puntos P en el plano tal que:

La relación de la distancia de F a la distancia desde L es la constante e de la cónica.

La ecuación polar de la cónica mostrada en el dibujo se puede escribir como:

Las posiciones más cercana y lejana de un planeta que al Sol, se denominan perihelio y afelio, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse. Las distancias anteriores están dadas por:

**Sucesiones**

Una sucesión es una secuencia de números ordenados con una secuencia lógica representada por una función matemática aplicada, cada elemento de esta secuencia se llama término de una sucesión. Una sucesión tiene infinitos términos y se expresa por su término general en que dado que en es una función que depende de n, basta con dar valores naturales a la indeterminada n para obtener cualquier término de la sucesión.

Una sucesión puede ser divergente o convergente, divergente si esa secuencia de números no tiene un fin, crece constantemente hasta el infinito y es convergente si esta secuencia se acerca a un número finito, nunca llega a él, pero si se acerca.

**Series**

Una serie es la representación de la suma a los términos de una sucesión infinita. El estudio de las series consiste en la evaluación de la suma de un número finito n de términos sucesivos, y mediante un pasaje al límite identificar el comportamiento de la serie a medida que n crece indefinidamente. Las series pueden iniciar en cualquier entero positivo de n. Sumar los términos de una sucesión infinita , se obtiene una expresión de la forma:

que se denomina serie infinita (o solo serie) y se denota con el símbolo:

Al igual que las sucesiones puede ser divergente o convergente usando el mismo concepto, divergente si la sumatoria de una secuencia de números no tiene un fin, crece constantemente hasta el infinito y es convergente si la sumatoria de esta secuencia se acerca a un número finito, nunca llega a él, pero si se acerca.

**Convergencia de una serie**

Convergencia de una serie Hay diferentes para comprobar si converge o diverge una serie, algunos determinan el valor de convergencia (suma de la serie) cuando la serie Converge. Si un criterio no puede demostrar si una serie converge, esto no quiere decir que la serie Diverge, únicamente indica que el criterio no puede demostrar la Convergencia (No concluye), por lo tanto, se debe utilizar otro criterio para demostrar la convergencia de la serie. Entre los criterios para demostrar la convergencia o divergencia de una serie están:

**Criterio de la Serie Geométrica**

Es una serie de la forma

La serie también puede ser:

Donde 𝑎 y 𝑟 son constante.

Si 𝑟 = −1 < 𝑟 < 1, entonces converge y su valor de convergencia viene dado por la suma de:

Y diverge si |𝑟|≥ 1

Criterio de la Serie Telescópica

Dada

Sin , L es una constante.

Entonces la serie converge y el valor de convergencia está dado por la suma:

𝑆𝑢𝑚𝑎 = 𝑎1−𝐿

**Criterio de la Serie Alternante**

Dada

Si cumple 2 condiciones:

Entonces la serie Converge.

**Problema 1: Ecuaciones Polares De Las Cónicas**

1. Utilice un programa de cómputo que tenga la capacidad de dibujar gráficas en coordenadas polares. Para 0 < 𝑒 < 1, para graficar simultáneamente las representaciones gráficas para los valores de 𝒆 = 𝟎. 𝟏, 𝟎. 𝟒, 𝟎. 𝟖 manteniendo 𝒅 fijo en 𝟒 Luego grafique simultáneamente una representación gráfica manteniendo 𝒆 fijo en 𝒆 = 𝟎. 𝟔 y haciendo variar 𝒅 en 𝒅 = 𝟐, 𝟔, 𝟖. Explique los resultados obtenidos en ambas gráficas. ¿Qué sección cónica se produce?

|  |  |
| --- | --- |
| Instrucción | Problema 1(Inciso I, Primera Parte) |
| Tenemos la ecuación  Gráficas para los valores de 𝒆 = 𝟎. 𝟏, 𝟎. 𝟒, 𝟎. 𝟖 manteniendo 𝒅 fijo en 𝟒   * Grafica verde * Grafica azul * Grafica roja |  |
| Instrucción | Problema 1(Inciso I, Segunda Parte) |
| Tenemos la ecuación  Gráficas manteniendo 𝒆 fijo en 𝒆 = 𝟎. 𝟔 y haciendo  variar 𝒅 en 𝒅 = 𝟐, 𝟔, 𝟖.   * Grafica naranja * Grafica morado * Grafica amarillo | En ambas graficas se producen elipses. Ya que según la definición. Si la excentricidad 𝑒 es 0<𝑒<1, entonces la cónica resultante es una elipse. |

1. Para 𝒆 = 𝟏, dibuje simultáneamente la representación gráfica de la ecuación (1) cuando se hace variar el valor de 𝒅 = 𝟑, 𝟒, 𝟕. ¿Qué cónica se obtiene? ¿Cómo cambia la gráfica al variar el valor de 𝒅?

|  |  |
| --- | --- |
| Instrucción | Problema 1 (Inciso II) |
| Tenemos la ecuación  Graficar para e = 1 haciendo variar el valor de 𝒅 = 𝟑, 𝟒, 𝟕   * Grafica roja * Grafica azul * Grafica verde | Por la definición de las cónicas, si la excentricidad 𝑒=1, entonces obtenemos una parábola. |

1. Dibuje Simultáneamente la representación gráfica para los valores de 𝒆 = 𝟐, 𝟒, 𝟖. manteniendo 𝒅 fijo en 𝒅 = 𝟒

|  |  |
| --- | --- |
| Instrucción | Problema 1 (Inciso III) |
| Tenemos la ecuación  Graficar para los valores de 𝒆 = 𝟐, 𝟒, 𝟖. manteniendo 𝒅 fijo en 𝒅 = 𝟒   * Grafica verde * Grafica azul * Grafica rojo | Por la definición de las cónicas, si la excentricidad 𝑒>1, entonces obtenemos una hipérbola. |

1. Dibuje simultáneamente la representación gráfica para los valores de 𝒅 = 𝟒, 𝟔, 𝟖. Y manteniendo 𝐞 fijo en 𝟐 ¿Qué sección cónica se obtiene? ¿Cómo cambia la gráfica al variar los valores de 𝐞 y de 𝒅?

|  |  |
| --- | --- |
| Instrucción | Problema 1 (Inciso IV) |
| Tenemos la ecuación  Graficar para los valores de 𝐞 fijo en 𝟐. los valores de 𝒅 = 𝟒, 𝟔, 𝟖.   * Grafica verde * Grafica morada * Grafica naranja | Por la definición de las cónicas, si la excentricidad 𝑒>1, entonces obtenemos una hipérbola |
| ¿Cómo cambia la gráfica al variar los valores de 𝑒 y 𝑑? | Cambiar e: Las graficas tiene un comportamiento más simétrico, ya que al tener fija la directriz, las hiperbolas no pasan por ese valor, y la excentricidad muestra que mientras más grande sea su valor, menor será su encurvamiento.    Cambiar d: Las graficas tienen un comportamiento muy variado, porque la directriz en cada ecuación es diferente, y por ende, no tendrá una secuencia simétrica en cada una. Como la excentricidad es la misma, el encurvamiento es igual para todas, pero al cambiar la directriz las posiciones de las cónicas son distintas. |

Ahora se está interesado en encontrar las ecuaciones polares para las órbitas de algunos planetas y exoplanetas, donde el Sol está en el polo. Entonces estas ecuaciones se pueden graficar, y se pueden contestar preguntas acerca de las órbitas. El material de la tabla se encuentra en el Almanaque mundial y contiene las excentricidades de las órbitas de algunos planetas y exoplanetas. En todos los casos el eje polar interseca con la órbita del planeta en el afelio (la distancia más grande al Sol).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| planeta | excentricidad | Semieje mayor (Unidades astronómicas) |
| Júpiter | 0.0484 | 5.203 |
| Saturno | 0.0543 | 9.539 |
| Urano | 0.0460 | 19.18 |
| Neptuno | 0.0082 | 30.06 |
| Plutón | 0.22 | 39.264 |
| Haumea | 0.189 | 43.335 |
| Makemake | 0.159 | 45.791 |
| Eris | 0.44 | 67.67 |

1. Encuentre una ecuación para cada una de las órbitas de los planetas y exoplanetas. Dibuje simultáneamente todas órbitas, en un recuadro de tal manera que se visualice claramente cada una de ellas.

La ecuación es

La incógnita sería 𝑑, pero sabemos que 𝑒𝑑=𝑎(1−𝑒2) La tabla nos muestra la excentricidad de cada planeta y el semieje mayor.

Ecuación para la órbita del planeta Júpiter

𝑒 = 0.0484 𝑦 𝑎 = 5.203

𝑒𝑑 = 5.203(1 − 0.04842) = 5.1908

Ecuación para la órbita del planeta Saturno

𝑒 = 0.0543 𝑦 𝑎 = 9.539

𝑒𝑑 = 9.539(1 − 0.05432) = 9.5108

Ecuación para la órbita del planeta Urano

𝑒 = 0.0460 𝑦 𝑎 = 19.18

𝑒𝑑 = 19.18(1 – 0.04602) = 19.1394

Ecuación para la órbita del planeta Neptuno

𝑒 = 0.0082 𝑦 𝑎 = 30.06

𝑒𝑑 = 30.06 (1 – 0.00822) = 30.05797

Ecuación para la órbita del planeta Plutón

𝑒 = 0.22 𝑦 𝑎 = 39.264

𝑒𝑑 = 39.264 (1 – 0.222) = 37.3636

Ecuación para la órbita del planeta Haumea

𝑒 = 0.189 𝑦 𝑎 = 43.335

𝑒𝑑 = 43.335(1 – 0.1892) = 41.7870

Ecuación para la órbita del planeta Makemake

𝑒 = 0.159 𝑦 𝑎 = 45.791

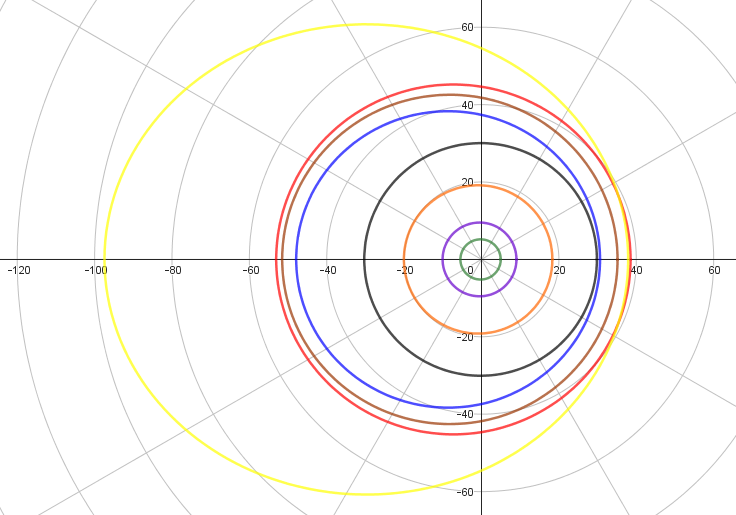
𝑒𝑑 = 45.791(1 – 0.1592) = 44.6333

Ecuación para la órbita del planeta Eris

𝑒 = 0.44 𝑦 𝑎 = 67.67

𝑒𝑑 = 67.67(1 – 0.442) = 54.5690

Grafica



* Júpiter
* Saturno
* Urano
* Neptuno
* Plutón
* Haumea
* Makemake
* Eris

1. Calcule los valores correspondientes del perihelio y el afelio de cada uno de los exoplanetas y exoplanetas.

Al perihelio: a (1− e)

Al afelio: a(1+e)

* Júpiter
* Perihelio 5.203(1-0.0484) = 4.9511
* Afelio 5.203(1+0.0484) = 5.4548
* Saturno
* Perihelio 9.539(1-0.0543) = 9.0210
* Afelio 9.539(1+0.0543) = 10.0569
* Urano
* Perihelio 19.28(1-0.0460) = 18.3931
* Afelio 19.28(1+0.0460) = 20.1668
* Neptuno
* Perihelio 30.06(1-0.0082) = 29.8135
* Afelio 30.06(1+0.0082) = 30.3064
* Plutón
* Perihelio 39.264(1-0.22) = 30.6259
* Afelio 39.264(1+0.22) = 47.9020
* Haumea
* Perihelio 43.335(1-0.189) = 35.1446
* Afelio 43.335(1+0.189) = 51.5253
* Makemake
* Perihelio 45.791(1-0.159) = 38.5102
* Afelio 45.791(1+0.159) = 53.0717
* Eris
* Perihelio 67.67(1-0.44) = 37.8952
* Afelio 67.67(1+0.44) = 97.4448

1. Calcule las distancias para cada planeta que se le indica, según el valor del ángulo θ indicado en la tabla

|  |  |
| --- | --- |
| Planeta | Angulo |
| Saturno |  |
| Urano |  |
| Plutón |  |
| Haumea |  |

* Saturno
* Urano
* Plutón
* Haumea

**Problema 2: Series**

Considere un cuadrado (rojo) de lado L como se muestra en la figura 1. Luego se agregan dos cuadrados más pequeños (Amarillos) en uno de los lados del cuadrado inicial (rojo) de tal manera que los cuadrados que se agregan forman un triángulo (blanco) isósceles con ángulos agudos de 45º como se puede observar en figura 2. Seguidamente se agregan dos cuadrados más pequeños

(Anaranjados) en uno de los lados de uno de los cuadrados que se agregaron en el paso anterior (amarillo) de tal manera que los cuadrados que se agregan forman un triángulo isósceles (como en el paso anterior) con ángulos agudos de 45º como se puede observar en figura 3. En cada paso siguiente se agregan dos cuadrados en un lado de uno de los cuadrados del paso anterior, siempre

formando triángulos isósceles con un lado del cuadrado anterior y un lado de cada uno de los cuadrados que se agregan, como se puede observar en los pasos 4, 5, 6 y 7 que se agregan, de manera recurrente hasta el infinito.

Tenemos que D es el diámetro y es la suma de todos los dígitos de los números de los integrantes del grupo.

L = 201901930

L = 2+0+1+9+0+1+9+3+0 = 25

1. Encuentre una serie en términos de L, que calcule la suma de las áreas de todos los cuadrados.
2. Sustituya el valor de L en la serie encontrada en el inciso anterior y calcule el valor de la serie.

Numero de carne = 201901930

L = 2+0+1+9+0+1+9+3+0 = 25

1. Encuentre una serie en términos de L, que calcule la suma de las áreas de los triángulos formados por los lados de los cuadrados.
2. Sustituya el valor de L en la serie encontrada en el inciso anterior y calcule el valor de la serie.

**CONCLUSIONES**

1. Gracias al conocimiento matemático adquirido, se fue capaz de interpretar gráficamente ecuaciones o problemas matemáticos consiguiendo de esta forma una mayor comprensión y retención de la información que se la información que está trabajando.
2. Representado las diferentes cónicas, se determinó que la excentricidad influye en la abertura de la parábola y de la hipérbola, en las elipses su estreches, además de definir la figura. La directriz influye en el tamaño de la figura sin altera su proporción.
3. Las ecuaciones de las cónicas son necesarias para poder saber las órbitas de ciertos planetas que giran en torno al sol.
4. Las sucesiones y series es una forma útil para trabajar diferentes problemas, ya que es una forma resumida realizar problemas. Al sumar n términos de una serie (sumatoria de una sucesión), se puede llegar tan cerca como se quiera al número s.

**RECOMENDACIONES**

GeoGebra fue muy útil y facilitó el proceso de graficar las cónicas polares, sin embargo, este software no cuenta con un modo específico para curvas polares, por lo que fue necesario simularlo con el uso de curvas paramétricas dentro del programa. A pesar de eso, los resultados fueron los esperados.

Para el cálculo de las series, pensamos que lo más importante es analizar el patrón en la sucesión, para así obtener el término n-ésimo correcto y resolver la serie, independientemente de su resultado.

**BIBLIOGRAFÍA**

*Calculator suite*. (s/f). Geogebra.org. Recuperado el 24 de marzo de 2024, de https://www.geogebra.org/calculator

Edwin J. Purcell y Dalle Varberg. Calculo con geometría analítica. PRENTICE HALL. Sexta edición.

Stewart, J. (2019). *CALCULO. TRASCENDENTES TEMPRANAS* (9a ed.). Cengage Learning Editores S.A. de C.V.

(S/f). Wordpress.com. Recuperado el 24 de marzo de 2024, de https://ingindustrial869624637.files.wordpress.com/2019/02/calculo-1-ron-larson-.pdf